

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTUDO DE BOCAL EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL USANDO AS
EQUAÇÕES DE EULER**

ALEXANDRE ROITMAN ROSSET

ORIENTADOR: PROF. DR. ERNANI VITILLO VOLPE.

SÃO PAULO

2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Rosset, Alexandre Roitman

Estudo de bocal em escoamento compressível bidimensional usando as equações de Euler / A.R. Rosset. – São Paulo, 2010.

36 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica dos fluidos computacional 2. Simulação I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

RESUMO

Atualmente, com o grande aumento da capacidade dos computadores ocorrido nas últimas duas décadas, técnicas computacionais utilizadas na resolução de problemas e projetos de engenharia estão se tornando cada vez mais frequentes, por permitir a construção de modelos cada vez mais complexos e a realização de simulações que auxiliam na compreensão dos fenômenos envolvidos.

O objetivo deste trabalho é utilizar tais técnicas na solução do escoamento compressível bidimensional em um bocal convergente-divergente. Para tanto será utilizado um Solver construído pelo então mestrando da Escola Politécnica Marcelo T. Hayashi que utiliza as equações de Euler para resolver o escoamento. Esse Solver terá que ser adaptado para o cálculo de escoamento internos, pois foi originalmente criado para o estudo de escoamentos externos em torno de aerofólios.

Os resultados obtidos serão comparados com simulações feitas no software comercial Fluent da Ansys, para que se possa checar os resultados obtidos e validar o método usado nas simulações.

ABSTRACT

The great increase in the computational power available to engineers in the last two decades has allowed numerical techniques to be used to solve complex problems and in the creation of whole new projects. This is possible because of the capability these new tools have to be used to model problems with ever increasing complexity.

The goal of this work is to make use of such techniques to solve the two dimensional compressible flow inside a convergent-divergent nozzle. This Solver, which was developed at EPUSP by Marcelo T. Hayashi, makes use of the Euler equations to solve fluid flows. The solver was originally developed to study external flows around airfoils, so it had to be adapted for its use in internal flows.

The results thus obtained will be compared with those that are gotten by means of the commercially available software Fluent by Ansys Inc., so as to validate our solver.

Conteúdo

1)INTRODUÇÃO	1
2)FUNDAMENTOS TEÓRICOS	3
2.1)Escoamento viscoso versus não-viscoso.....	3
2.2)Equações de Navier-Stokes.....	3
2.3)Equações de Euler	4
2.4)Escoamento compressível com área variável.....	6
2.4.1)Propriedades de estagnação	7
2.4.2)Escoamento com área variável.....	7
3)IMPLEMENTAÇÃO NÚMERICA.....	10
3.1)Estruturação da malha.....	10
3.2)Discretização das equações de Euler	10
3.3)Dissipação artificial	12
3.4)Esquema de Marcha no tempo	12
3.5)Adaptação do solver.....	14
3.6)Modelagem do bocal.....	14
4)RESULTADOS	17
4.1)Caso 1	17
4.2)Caso 2	26
4.3)Comparação com o caso Viscoso	33
5)CONCLUSÃO	35
6)BIBLIOGRAFIA	36

Lista de figuras

Figura 1: Bocal Convergente-divergente	7
Figura 2: Representação esquemática do i-ésimo volume de controle.....	12
Figura 3: Bocal Inicial.....	15
Figura 4: Forma final do bocal gerado pelo Gambit.....	16
Figura 5: Densidade calculada pelo Solver.....	18
Figura 6: Densidade calculada pelo Fluent.....	18
Figura 7: Pressão estática calculada pelo Solver.....	19
Figura 8: Pressão estática calculada pelo Fluent.....	19
Figura 9: Temperatura estática calculada pelo Solver.....	20
Figura 10: Temperatura estática calculada pelo Fluent.....	20
Figura 11: Número de Mach calculado pelo Solver.....	21
Figura 12: Número de Mach calculado pelo Fluent.....	22
Figura 13: Pressão de estagnação calculada pelo Solver.....	23
Figura 14: Temperatura de estagnação calculada pelo Solver.....	23
Figura 15: Pressão de estagnação calculada pelo Fluent.....	24
Figura 16: Temperatura de estagnação calculada pelo Fluent.....	25
Figura 17: Calculo de densidade pelo Solver (Caso 2).....	26
Figura 18: Calculo de densidade pelo Fluent (caso 2).....	27
Figura 19: Pressão estática calculado pelo Solver (caso 2).....	27
Figura 20: Pressão estática calculado pelo Fluent (caso 2).....	28
Figura 21: Temperatura estática calculada pelo Solver (caso 2).....	28
Figura 22: Temperatura estática calculada pelo Fluent (caso 2).....	29
Figura 23: Número de Mach calculado pelo Solver (caso 2).....	30
Figura 24: Número de Mach calculado pelo Fluent (caso 2).....	30
Figura 25: Pressão de estagnação calculada pelo Solver (caso 2).....	31
Figura 26: Temperatura de estagnação calculada pelo Solver (caso 2).....	31
Figura 27: Pressão de estagnação calculada pelo Fluent (caso 2).....	32
Figura 28: Temperatura de estagnação calculada pelo Fluent (caso 2).....	33
Figura 29: Número de Mach para o caso 2 viscoso.....	33

1)INTRODUÇÃO

Atualmente, com o grande aumento da capacidade dos computadores ocorrido nas últimas duas décadas, técnicas computacionais utilizadas na resolução de problemas e projetos de engenharia estão se tornando cada vez mais frequentes, por permitir a construção de modelos cada vez mais complexos e a realização de simulações que auxiliam na compreensão dos fenômenos envolvidos.

Um exemplo dessas técnicas é a Dinâmica dos fluidos Computacional (CFD, do inglês Computational Fluid Dynamics), que permite o estudo da Mecânica dos Fluidos envolvida desde projetos simples de ventilação até sistemas complexos como a aerodinâmica de aeronaves de grande porte. Essa técnica consiste em obter soluções numéricas aproximadas para as equações diferenciais parciais não lineares que regem a Dinâmica dos Fluidos, obtidas a partir do princípio de conservação de massa, energia e quantidade de movimento.

É importante salientar, porém, que as programas CFD são apenas mais uma ferramenta que auxiliam na solução de problemas de engenharia, e que é necessário que o usuário tenha conhecimento das técnicas utilizadas e dos fundamentos teóricos que compõem o problema estudado, para assim poder interpretar e tirar conclusões corretas sobre os resultados obtidos.

Tendo em vista estas observações iniciais, o objetivo deste trabalho de formatura é, através do uso de ferramentas computacionais, realizar um estudo sobre o comportamento de um bocal usado em foguetes sinalizadores. Como ponto de partida será adotado a geometria obtida pelo ex-aluno Gabriel Machado Ramalho em seu trabalho de formatura.

Para isso será primeiramente utilizado um Solver Euler (programa computacional que resolve problemas de Mecânica dos Fluidos usando as equações de Euler para escoamentos) desenvolvido no Núcleo de Dinâmicos e Fluidos (NDF) da Escola Politécnica da USP pelo então mestrando Marcelo T. Hayashi. Como este programa foi projetado inicialmente para o cálculo do escoamento externo sobre aerofólios, uma adaptação será feita para que ele possa ser usado para o cálculo de escoamentos internos. Feito este estudo, será usado o Fluent, um software CFD disponível

comercialmente, para realizar os cálculos do escoamento não-viscoso. Com isso será possível comparar os resultados e validar a solução obtida. Espera-se mostrar a validade do Solver adaptado e o uso das equações de Euler para a resolução de escoamentos internos em bocais convergentes-divergentes em regime de escoamento compressível.

2)FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1)Escoamento viscoso versus não-viscoso

Quando um fluido se move, ele está sujeito aos fenômenos de difusão de massa, viscosidade e condução térmica. Escoamentos sujeitos a estes fenômenos são usualmente conhecidos como viscosos. Em comparação, um escoamento que não envolve nenhum dos fenômenos mencionados é conhecido como um escoamento não-viscoso ou inviscido (do inglês inviscid).

Apesar de não existirem na natureza, há muito casos práticos de escoamentos na aerodinâmica onde a influencia dos efeitos de viscosidades são pequenos e, portanto, podem ser modelados como escoamentos inviscidos. Teoricamente, o escoamento inviscido ocorre quando o numero de Reynolds tende a infinito [2], mas para casos práticos esta hipótese é adotada quando o numero de Reynolds é muito alto, porém finito.

O escoamento, tanto viscoso como não viscoso, pode ser representado por equações diferenciais que utilizam os princípios de conservação de massa, energia e quantidade de movimento, como as equações de Navier-Stokes para casos viscosos e as equações de Euler para casos não viscosos.

2.2)Equações de Navier-Stokes

A equação de conservação da quantidade de movimento para fluidos Newtonianos-Stokianos é chamada de equação de Navier-Stokes, em homenagem aos físicos Claude-Louis Navier e George Stoke. Entretanto, é comum na área da Engenharia Aeronáutica chamar de Navier-Stokes o sistema de equações que também inclui as equações da continuidade e energia, aqui apresentadas pelo sistema de equações diferenciais parciais apresentado na sua forma integral abaixo.

$$\text{massa} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\text{quant. mov.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV + \oint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \oint_S p d\vec{S} = \oint_S \vec{f}_e dS \quad (2.1.2)$$

$$\text{energia} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V e dV + \oint_S \rho H \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{f}_e \cdot \vec{V} dS + \oint_S \vec{q} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.3)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido com velocidade $\vec{V}$, sob pressão p , sujeito a forças externas $\vec{f}_e$, fluxo de calor $\vec{q}$, com entalpia total H e energia específica e em um volume V e superfície S .

2.3) Equações de Euler

As equações de Euler (2.2), representadas abaixo na sua forma integral, são uma simplificação das equações de Navier-Stokes onde a viscosidade e efeitos da transferência de calor do fluido são desprezados. As equações de Euler são muito utilizadas na engenharia aeronáutica em escoamentos de alta velocidade, onde as forças viscosas se concentram numa região limitada denominada camada limite. Além disso, essas equações são capazes de capturar efeitos de compressibilidade não lineares como as ondas de choques.

$$\text{massa} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\text{quant. mov.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV + \oint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \oint_S p d\vec{S} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\text{energia} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V e dV + \oint_S \rho H \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.2.3)$$

As equações de Euler podem, no entanto, ser representadas em sua forma conservativa (também conhecida como divergente), apresentada no sistema (2.3), que são obtidas aplicando o teorema de Gauss às integrais de superfície do sistema de equações (2.2), transformando-as em integrais de volume.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dV = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) dV + \int_V \nabla \cdot p dV = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} e d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho H \vec{V}) d\mathcal{V} = 0 \quad (2.3.3)$$

onde o operador divergente ∇ é dado pela seguinte expressão:

$$\nabla \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.4)$$

em que $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os versores nas direções x, y e z, respectivamente.

No entanto, a utilização do teorema de Gauss requer que não haja descontinuidade no volume de controle $\mathcal{V}$. Assim, o sistema de equações (2.3), a rigor, não é aplicável em ondas de choque. Nestas regiões, vale apenas a solução fraca, que é obtida a partir das equações (2.2) ao considerar a onda de choque isolada em um volume de controle e, então, estabelecer a continuidade dos fluxos de massa, quantidade de movimento e energia na superfície desse volume (M. T. HAYASHI, 2009).

Como as equações (2.3) são escritas para um volume arbitrário $\mathcal{V}$, elas devem ser válidas localmente para qualquer ponto do domínio. Isto leva a forma diferencial das leis de conservação, apresentada abaixo (2.5) para escoamentos bidimensionais.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

onde o vetor de estados $\mathbf{Q}$ e os vetores de fluxo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são dados por:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Para completar o sistema de equações é comum adotar a hipótese de gás térmica e caloricamente perfeito (gás ideal):

$$p = \rho RT = (\gamma - 1)\rho e_i \quad (2.7)$$

onde T é a temperatura do fluido, γ é a razão de calores específicos, R é a constante do gás e energia interna específica e_i é dada por:

$$e_i = C_v T \quad (2.8)$$

Como última hipótese, admite-se que o gás seja caloricamente perfeito, ou seja, a relação de calores específicos é constante:

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = \text{constante} \quad (2.9)$$

Por fim, a energia específica total, definida pela soma da energia interna com a energia cinética, é dada pela seguinte expressão:

$$e \equiv \left[e_i - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (2.10)$$

Associando as equações (2.7) e (2.10), obtém-se a equação de estado (2.11) que será utilizada para “fechar” o sistema:

$$p = \left[e - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2) \right] (\gamma - 1) \quad (2.11)$$

Com isso, temos um número suficiente de equações para resolver as 5 incógnitas (massa específica ρ , 2 componentes do vetor velocidade $\vec{V}$, pressão estática p e energia e) para o caso do escoamento bidimensional.

Uma descrição completa do comportamento das equações de Euler pode ser visto em [5], onde o autor descreve a propagação de informação por meios de suas características, sua influência nas condições de contorno e as propriedades de suas matrizes Jacobianas. Por fugir do escopo deste trabalho de graduação, estas propriedades não serão discutidas neste trabalho.

2.4) Escoamento compressível com área variável

O escoamento compressível é definido como um escoamento onde a densidade ρ do fluido é variável, ao contrário do escoamento incompressível onde ρ é considerado constante por todo o escoamento. Por via de regra, um escoamento é considerado compressível quando a sua velocidade é superior a $M=0,3$, com M sendo o número de Mach, definido por:

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.12)$$

onde V é a velocidade do fluido e a a velocidade do som no fluido.

2.4.1) Propriedades de estagnação

Neste ponto é importante citar a Temperatura e Pressão de estagnação (ou total), conhecidas com T_0 e p_0 , respectivamente. A sua formulação é dada por:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (2.13)$$

e

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.14)$$

Esses valores serão de grande utilidade na verificação do resultado obtido nas simulações, pois no escoamento Euler T_0 mantém-se constante onde não é realizado trabalho, como no bocal, enquanto p_0 sofre alterações na onda de choque, mas permanecerá constante no resto do escoamento. Portanto, para validar as soluções obtidas pode-se calcular T_0 e p_0 em todo o escoamento e verificar se eles se mantêm constantes e que não haja nenhum local onde T e p sejam maiores que seus valores de estagnação.

2.4.2) Escoamento com área variável

Para a geração do empuxo, os foguetes utilizam um Bocal Convergente-Divergente, também conhecido como Bocal De Laval, esquematizado na figura 1:

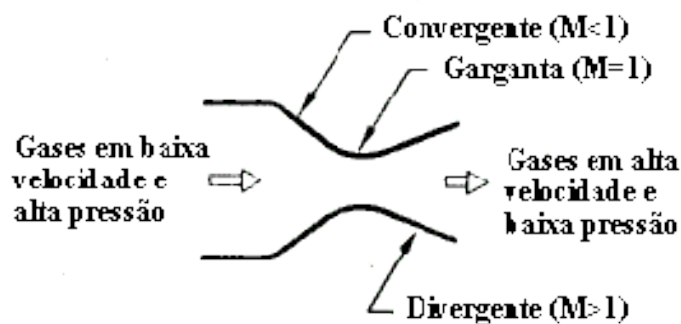


Figura 1: Bocal Convergente-divergente

Da equação da continuidade em sua forma diferencial temos que

$$\rho \cdot v \cdot A = cte \Leftrightarrow d(\rho \cdot v \cdot A) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.15)$$

onde A é a área da seção transversal ao escoamento.

Eliminando $d\rho/\rho$ da equação 2.15, considerando $dp = -\rho \cdot v \cdot dv$

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -v \cdot dv \quad (2.16)$$

Considerando o escoamento adiabático e inviscido, temos que o escoamento é isentrópico (a menos da presença de ondas de choque). Com isso, qualquer mudança na pressão dp é acompanhada por uma mudança $d\rho$ na densidade. Portanto, temos que:

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \quad (2.17)$$

Das equações 2.16 e 2.17,

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -v \cdot dv \quad (2.18)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v \cdot dv}{a^2} = -\frac{v^2 \cdot dv}{a^2 \cdot v} = -M^2 \frac{dv}{v} \quad (2.19)$$

Por último, substituindo a equação 2.19 na 2.15,

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \cdot \frac{dv}{v} \quad (2.16)$$

A equação 2.16, chamada de relação área-velocidade, mostra que quando $0 \leq M < 1$ (escoamento subsônico), um aumento na velocidade é associado a uma diminuição da área e vice-versa. Quando $M > 1$ (escoamento supersônico), um aumento na velocidade é associado a um aumento da área. Quando $M=1$ (escoamento sônico) temos que $dA/A=0$, o que corresponde a um local com área mínima (conhecida como garganta).

Por último, como Anderson demonstra em [2] e na equação 2.17, reproduzida a seguir, o número de Mach em qualquer local do bocal é função da relação entre a área da garganta A^* e a área local A .

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}} \quad (2.17)$$

Portanto, com o uso da equação 2.17 e dos valores de estagnação é possível calcular as pressões e temperaturas em qualquer ponto do escoamento sabendo a geometria do Bocal. É importante salientar que é adotada a hipótese de que p_0 e T_0 permanecerão constantes por todo o escoamento, contanto que não haja ondas de choque, onde p_0 , conforme mencionado, sofreria alterações.

3)IMPLEMENTAÇÃO NÚMERICA

3.1)Estruturação da malha

A resolução numérica de problemas pelo método dos volumes finitos requer a discretização espacial do domínio de interesse. Para isso, existem basicamente duas classes de malhas utilizadas para realizar esta discretização: estruturadas e não estruturadas. O que diferencia uma da outra é a maneira como a informação dos seus elementos é associada. Nas estruturadas, a conectividade de cada volume é diretamente conhecida na ordenação da malha. Por exemplo, numa malha estruturada bidimensional o elemento (i,j) tem como “vizinhos” os elementos (i+1,j), (i-1,j), (i,j+1) e (i,j-1). Em malhas não-estruturadas, no entanto, tal ordenação não existe, o elemento 4073 pode dividir arestas com os elementos 2, 596 e 7896, por exemplo. Portanto, a informação de conectividade deve ser armazenada à parte.

Apesar de apresentarem maior custo computacional, as malhas não-estruturadas permitem uma melhor representação de geometrias complexas. Portanto, com o aumento da capacidade computacional disponível, seu uso está se tornando cada vez mais freqüente.

O solver utilizado faz seus cálculos a partir de malhas com elementos triangulares, no qual as propriedades são atribuídas ao centróide do elemento e avaliadas como a média da propriedade do mesmo, de maneira que os volumes estejam definidos explicitamente pela própria malha. Esse método é conhecido como centrado nas células (cell centered).

3.2)Discretização das equações de Euler

As equações de Euler podem ser escritas na forma integral para coordenadas cartesianas 2D como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_V Q dx dy + \int_S (E dy - F dx) = 0 \quad (3.1)$$

Onde V representa a área do volume de controle e S sua superfície.

A seguinte forma de discretização é apresentada por Azevedo e Dourado [3], baseado no trabalho de Jameson e Mavriplis [6].

Num algoritmo padrão de volume finito para uma malha que representa a superfície a ser estudada, o procedimento usual é de definir um vetor médio de quantidades conservadas $\bar{Q}$ em cada volume de controle i da malha de tal forma que

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{V_i} \cdot \iint_{V_i} Q dx dy \quad (3.2)$$

As equações de Euler para cada célula elementar i da malha podem então ser reescritas da seguinte forma (para simplificar a notação, será omitida a barra para designar as quantidades médias por célula, mas elas sempre serão mencionadas na indicação das propriedades de um volume i)

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_i Q_i) + \int_{S_i} (E dy - F dx) = 0 \quad (3.3)$$

O processo de discretização da integral de superficial na equação acima recai em um operador convectivo chamado de $C(Q_i)$. Para uma malha não-estruturada composta por elementos triangulares, este operador pode ser escrito como:

$$C(Q_i) = \sum_{k=1}^3 [E(Q_{ik}) \Delta y_{ik} - F(Q_{ik}) \Delta x_{ik}] \cong \int_{S_i} (E dy - F dx) \quad (3.4)$$

com

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} (Q_i + Q_k) \quad (3.5)$$

onde i representa a célula central e k as 3 células adjacentes a ela, conforme ilustrado na figura 2 abaixo.

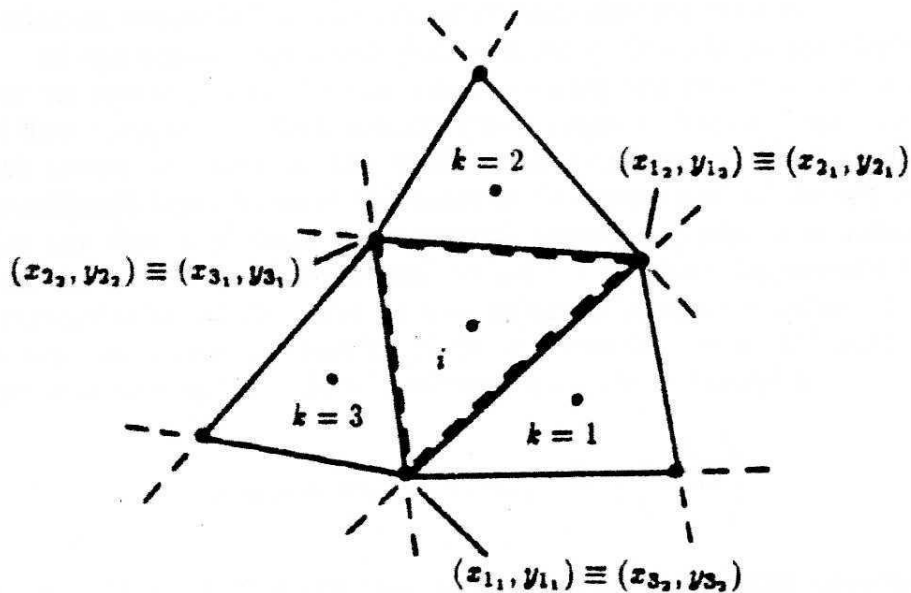


Figura 2: Representação esquemática do i-ésimo volume de controle.

É importante observar que o método de Jameson, utilizado na construção do Solver, avalia as propriedades na face formada entre os elementos i e k através de um esquema centrado como mostra a equação 3.5.

3.3) Dissipação artificial

Como oscilações perto de ondas de choques podem aparecer, é necessário utilizar alguma forma de dissipação artificial. É então utilizada uma combinação de operadores harmônicos e bi-harmônicos para construir essa dissipação artificial, como usada por Jameson e Mavriplis [6].

M.T. Hayashi descreve em [5] como foi feito o uso desta dissipação, que foi implementada no Solver, e, portanto, não serão descritas em detalhe nesse trabalho.

3.4) Esquema de Marcha no tempo

As equações completamente discretizadas no espaço, já com os termos de dissipação $D(Q_i)$ incluídos, assumindo uma malha estacionaria, podem ser escritas então como:

$$\frac{DQ_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} [C(Q_i) - D(Q_i)] \quad (3.6)$$

Jameson e Mavriplis [6] sugerem o uso do método de Runge-Kutta de 5 passo e 2ª ordem de precisão para discretizar a derivada temporal do sistema 3.6. Note que com a utilização de um método de marcha no tempo de Runge-Kutta de 5 passos seria possível obter até 5ª ordem de precisão. Entretanto, a escolha dos coeficientes α_i apresentada troca a precisão por um aumento da região de estabilidade.

Por questões de economia de processamento, o operador dissipação só é calculado até o segundo estágio. Esta discretização resulta no seguinte método numérico de marcha no tempo:

$$Q_i^{(0)} = Q_i^n$$

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t_i}{V_i} [C(Q_i^{(0)}) - D(Q_i^{(0)})]$$

$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(1)} - \alpha_2 \frac{\Delta t_i}{V_i} [C(Q_i^{(1)}) - D(Q_i^{(1)})]$$

$$Q_i^{(3)} = Q_i^{(2)} - \alpha_3 \frac{\Delta t_i}{V_i} [C(Q_i^{(2)}) - D(Q_i^{(2)})]$$

$$Q_i^{(4)} = Q_i^{(3)} - \alpha_4 \frac{\Delta t_i}{V_i} [C(Q_i^{(3)}) - D(Q_i^{(3)})]$$

$$Q_i^{(5)} = Q_i^{(4)} - \alpha_5 \frac{\Delta t_i}{V_i} [C(Q_i^{(4)}) - D(Q_i^{(4)})]$$

$$Q_i^{(n+1)} = Q_i^{(5)}$$

onde os coeficientes utilizados são $\alpha_1 = 1/4, \alpha_2 = 1/6, \alpha_3 = 3/8, \alpha_4 = 1/2, \alpha_5 = 1$.

O passo de tempo utilizado será:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta l_i \cdot CFL}{v_{char}} \quad (3.7)$$

onde $v_{char} = (|\vec{V}| + c)_i$ corresponde ao maior valor das matrizes jacobianas, ou seja, a maior velocidade de propagação, CFL corresponde ao número de Courant-Friedrichs-Lewy e Δl_i corresponde à dimensão da menor aresta do volume i (M. T. HAYASHI, 2009).

3.5) Adaptação do solver

Para que o Solver pudesse ser usado em escoamentos internos em bocais, primeiramente o modo como ele realizava a leitura da malha teve que ser alterado, para que ele lesse e armazenasse a parede do bocal, seu eixo de simetria, a seção de entrada e a seção de saída ao invés de somente as paredes de uma asa e o escoamento no infinito. Feito isso, foi necessário fazer com que o Solver armazenasse as condições iniciais tanto da seção de entrada como a de saída.

Após estas mudanças, a inicialização do Solver foi alterada, para que ele inicializasse os cálculos a partir da seção de entrada, pois nessa seção os valores de pressão e temperatura de estagnação seriam constantes.

Por último, conforme o escoamento era acelerado na seção divergente até velocidades supersônicas, o surgimento de ondas de choque nessa parte do bocal fazia necessário garantir que o Solver fixasse sempre a pressão na seção de saída como aquela definida nas condições iniciais, independentemente do surgimento ou não de ondas de choque. Se após a onda de choque a pressão da saída não fosse fixada novamente na condição inicial, ocorreria que o escoamento não conseguiria se desenvolver completamente e “expulsar” a onda de choque, fazendo com que houvesse o surgimento de velocidades negativas no eixo X e um conseqüente erro no programa, que não conseguia terminar os cálculos. Isso ocorre porque na saída supersônica não há condições de contorno e, portanto, a própria pressão estática muda nesse local. Com isso, se a saída voltasse a ser subsônica, a pressão estática no local seria diferente do valor estabelecido pelo usuário.

3.6) Modelagem do bocal

O bocal a ser estudado foi originalmente baseado no resultado obtido por Ramalho em [7] e é exibido de modo simplificado na figura 3, considerando ainda uma simetria horizontal (todas as medidas encontram-se em mm).

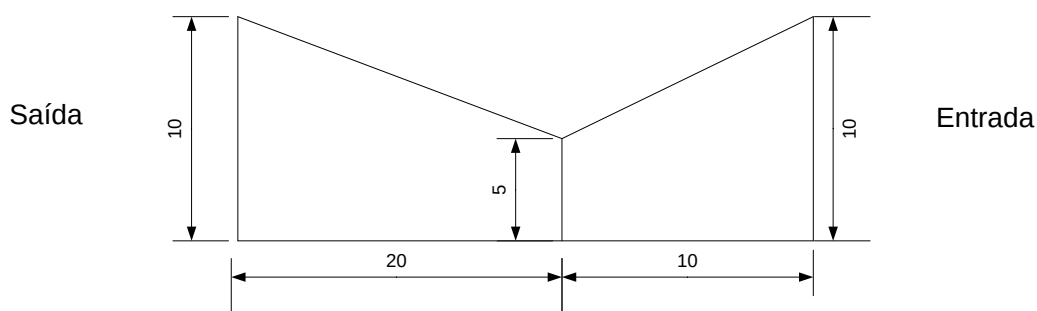


Figura 3: Bocal Inicial.

Da figura observa-se que o bocal tem um diâmetro de garganta de 10 mm, que foi escolhido para garantir a blocagem deste. Porém, devido a algumas particularidades do Solver Euler, mudanças na geometria do bocal foram necessárias.

A primeira foi a mudança da posição da garganta, fazendo com que ela se situasse no meio do bocal, assim como a suavização da sua geometria, substituindo as paredes retas por paredes curvas. Isso foi feito pois com a geometria original havia a ocorrência de recirculação, o aparecimento de velocidades negativas no eixo X. Isso causava erros de calculo no programa que levava, inevitavelmente, a não convergência dos cálculos.

A segunda mudança foi a adição de duas seções retangulares na entrada e na saída do bocal, para garantir que o escoamento pudesse se desenvolver completamente antes da seção convergente do bocal e após a seção divergente.

Na figura 4 pode-se observar sua forma final junto com a sua malha. Com a forma final, foi criada uma malha não estruturada de elementos triangulares para ser lido pelo programa. O tamanho dos elementos foi escolhido de forma a garantir boa precisão nos cálculos, minimizando os resíduos provenientes destes, ao mesmo tempo que não exigisse excessivo custo computacional. A geometria foi criada usando o software Ansys Gambit, que permite criar a malha e fixar as condições de contorno para uso tanto pelo Solver como que pelo Fluent.

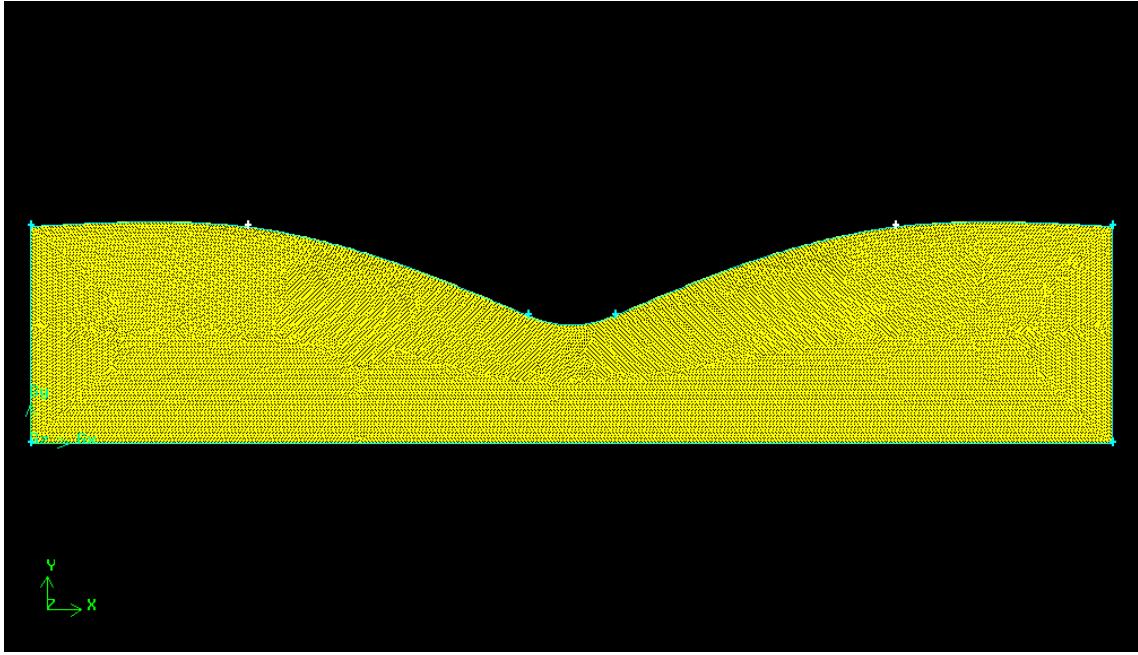


Figura 4: Forma final do bocal gerado pelo Gambit.

4) RESULTADOS

Com o Solver devidamente adaptado e a geometria do bocal definida, com uma malha criada nela, iniciou-se a simulação tanto com o Solver como com o Fluent para dois casos distintos, onde eram variadas as condições iniciais nas seções de saída e entrada do bocal. Feito isso, foram analisados o escoamento resultante avaliando-se a pressão p , temperatura T , densidade ρ e o número de Mach M . Também foram calculadas a pressão de estagnação p_0 e a temperatura de estagnação T_0 para checar se o escoamento apresentava algum ponto onde esses dois valores não seriam constantes.

Nos dois casos a relação entre calores específicos foi $\gamma = 1,4$, a constante dos gases foi de $R=287$ e o CFL foi de 0,9. 10.000 iterações foram realizadas para garantir um resultado com baixo resíduo e, portanto, considerado como convergido.

4.1) Caso 1

Nesse primeiro caso a pressão estática na entrada foi de $p_1=500$ kPa e a temperatura estática foi de $T_1=500$ K. Na saída, a pressão estática foi de $p_2= 100$ kPa e a temperatura estática foi de $T_2=300$ K. O Mach inicial do escoamento foi de $M_{\text{inicial}}=0,7$

Com base no Mach inicial e na pressão e temperatura da entrada é possível calcular a pressão e temperatura de estagnação usando as equações 2.13 e 2.14. Com isso, temos que:

$$p_0 = 693,6 \text{ kPa e } T_0 = 549 \text{ K} \quad (4.1)$$

Começamos a analisar primeiramente o resultado da densidade, a figura 5 mostrando o resultado obtido pelo Solver e a figura 6 o resultado obtido pelo Fluent.

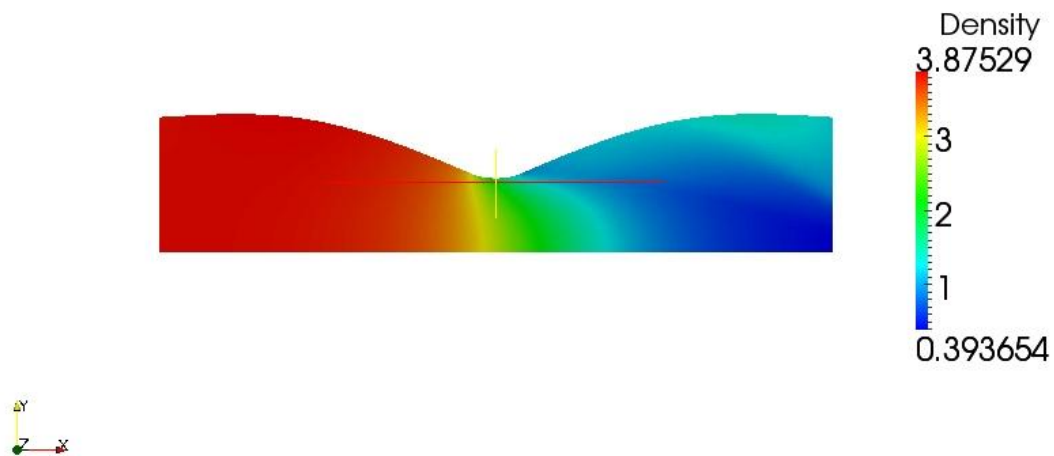


Figura 5: Densidade calculada pelo Solver.

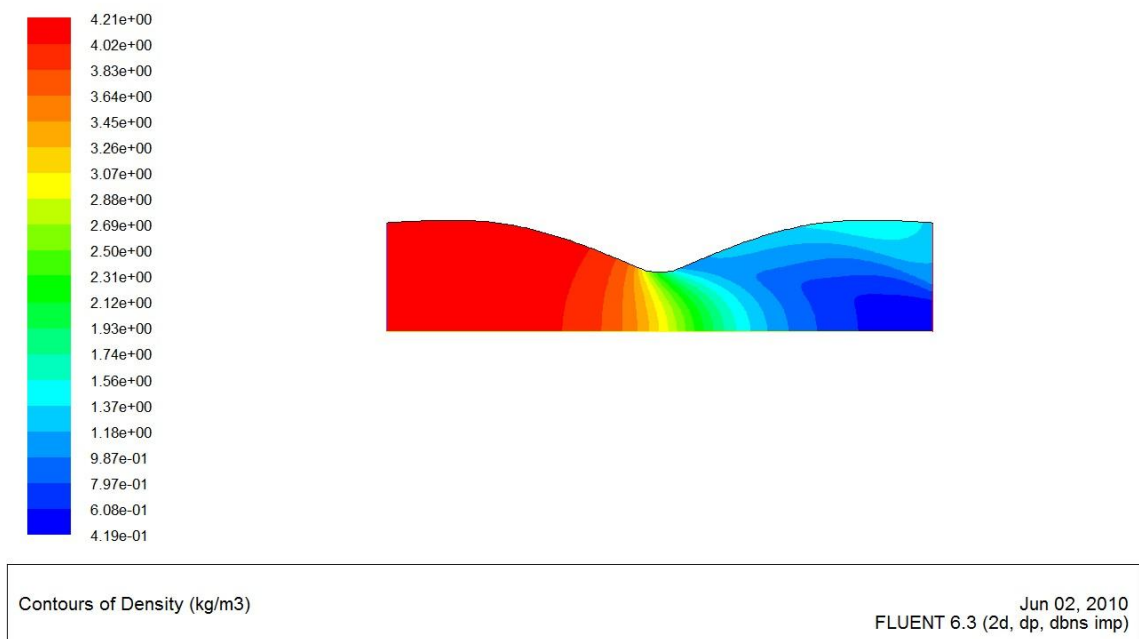


Figura 6: Densidade calculada pelo Fluent.

Pode-se ver que, apesar da diferença entre os valores superiores de ambos os resultados da ordem de 8%, a distribuição da densidade é muito semelhante em ambos os casos, o que valida este cálculo.

A seguir, é analisada a distribuição da pressão estática em ambos os casos. A figura 7 mostra os resultados do Solver e a figura 8 mostra os resultados do Fluent (em Pa).

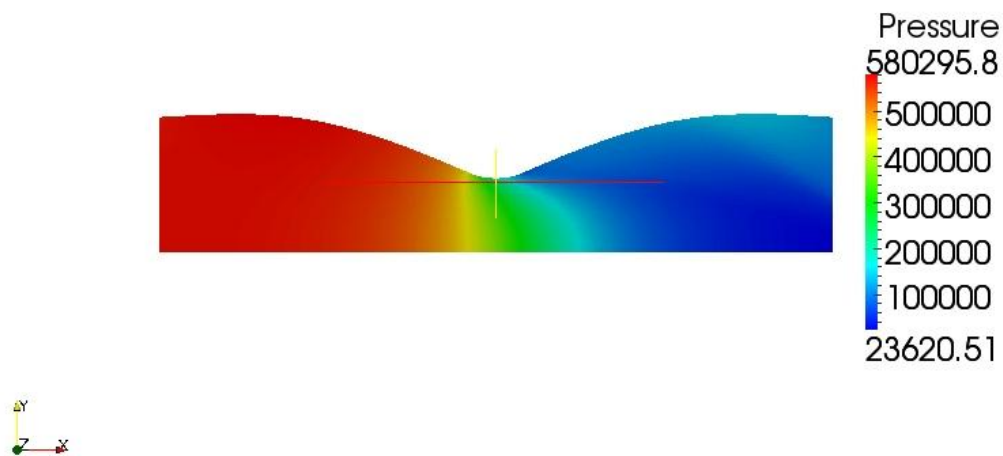


Figura 7: Pressão estática calculada pelo Solver.

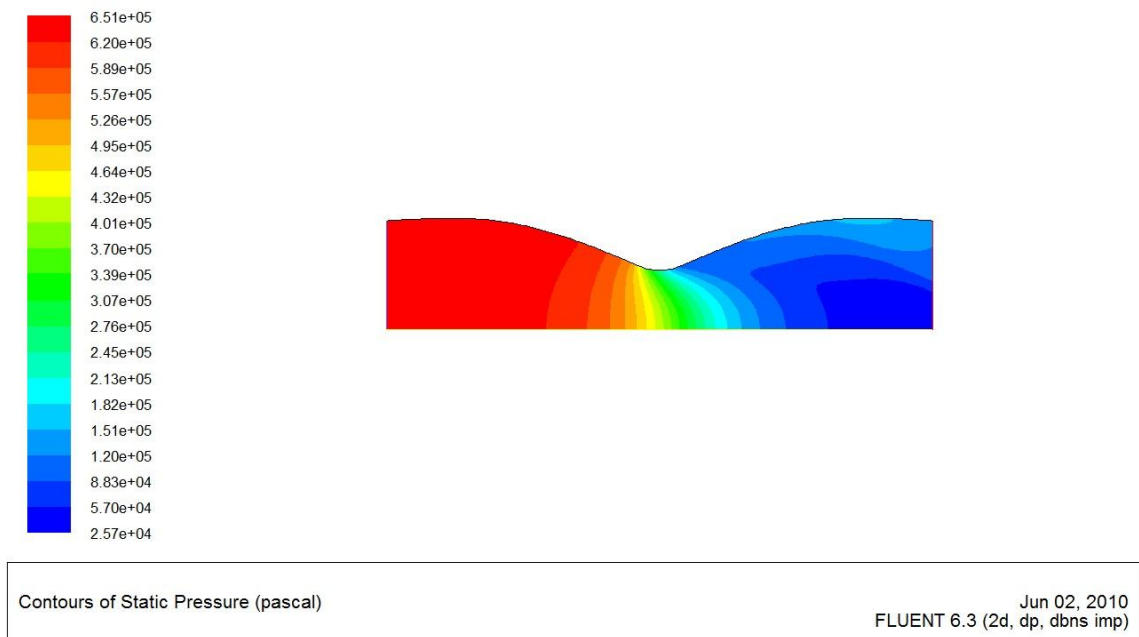


Figura 8: Pressão estática calculada pelo Fluent.

Aqui a diferença máxima entre pressões é da ordem 11%, o que aparenta ser alta, mas a distribuição de pressão permanece muito semelhante. As diferenças entre resultados são resultados da forma como cada programa realiza seus cálculos, e não invalida os resultados obtidos até agora. Ainda considerando a pressão de estagnação calculada,

vemos que nenhum dos dois programas obteve qualquer ponto acima desta pressão, o que vai de encontro com o esperado.

O próximo resultado a ser analisado é a Temperatura estáticas, mostrada na figura 9 para o Solver e na figura 10 para o Fluent (em K).

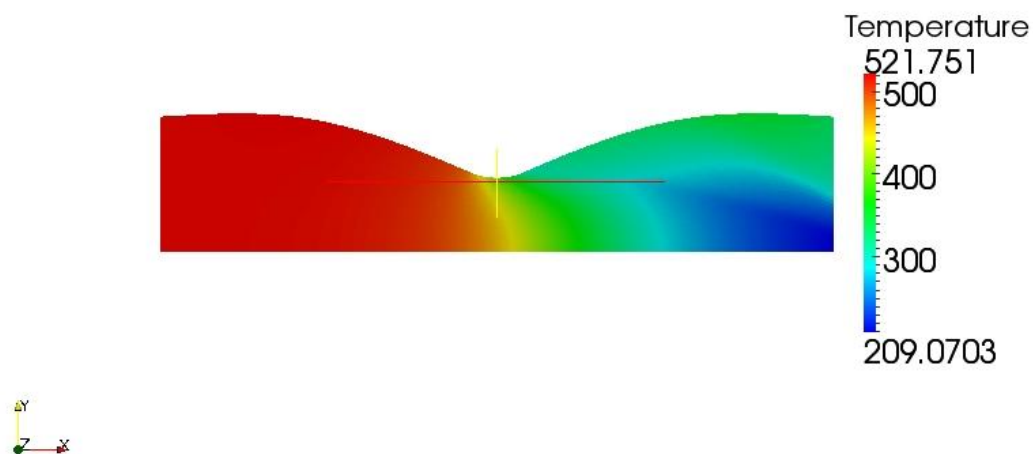


Figura 9: Temperatura estática calculada pelo Solver.

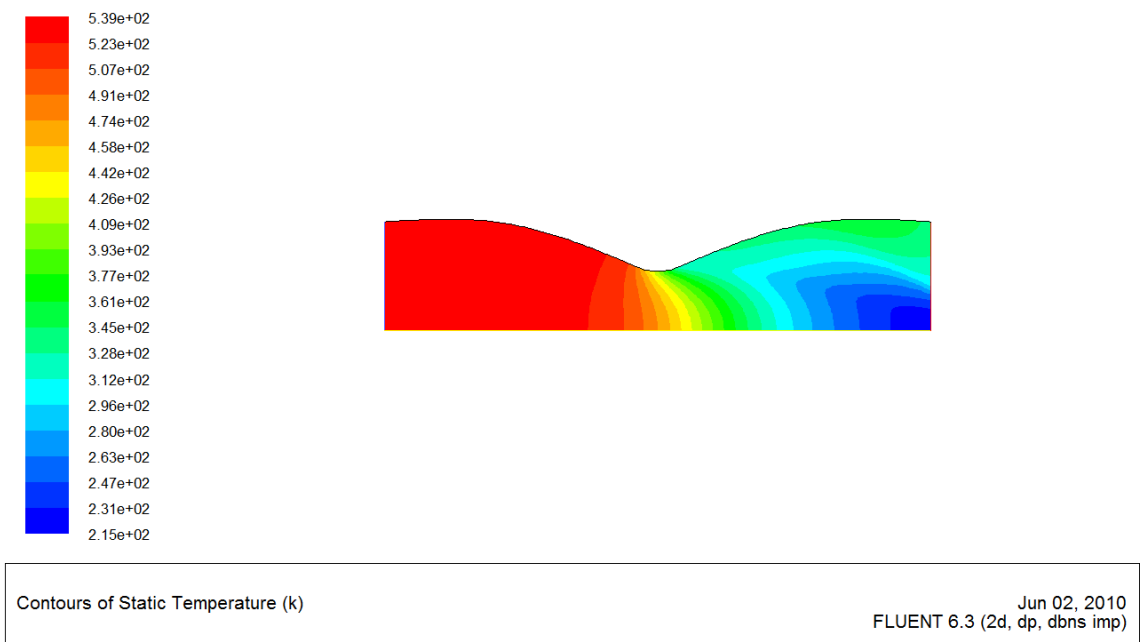


Figura 10: Temperatura estática calculada pelo Fluent.

Nesse caso, a diferença entre as máximas temperaturas é de apenas 3,5%, com a distribuição de temperaturas praticamente idênticas. Aqui, como na distribuição de pressões, nenhum ponto do escoamento teve temperaturas mais altas que as de estagnação, novamente validando os dados obtidos.

Por último, as figuras 11 e 12 mostram a distribuição do número de Mach pelo escoamento, sendo a figura 11 obtida do Solver e a 12 do Fluent.

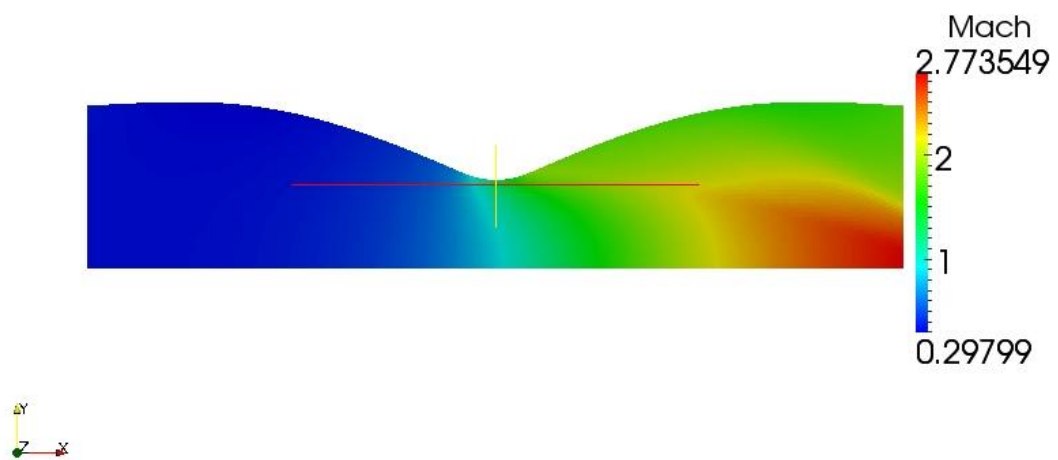


Figura 11: Número de Mach calculado pelo Solver.

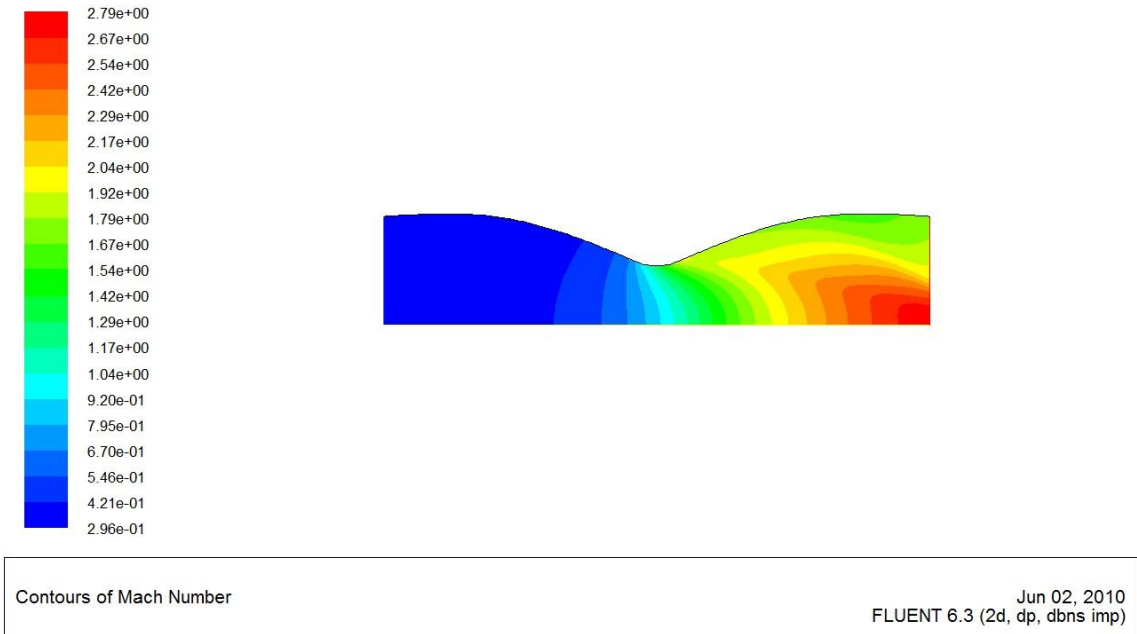


Figura 12: Número de Mach calculado pelo Fluent.

A comparação entre os dois resultados mostra que a distribuição de Mach em ambos os casos é idêntica, com uma diferença de apenas 0,7% entre os máximos resultados obtidos. Além disso, em ambos os casos o bocal se encontra bloqueado (Mach=1 na garganta), o que mostra que os resultados obtidos estão corretos e muito próximos de si.

Por último, é checada se a pressão de estagnação (figura 13, em Pa) e a temperatura de estagnação (figura 14, em K) permanecem constantes por todo o escoamento e de acordo com os valores de 4.1.

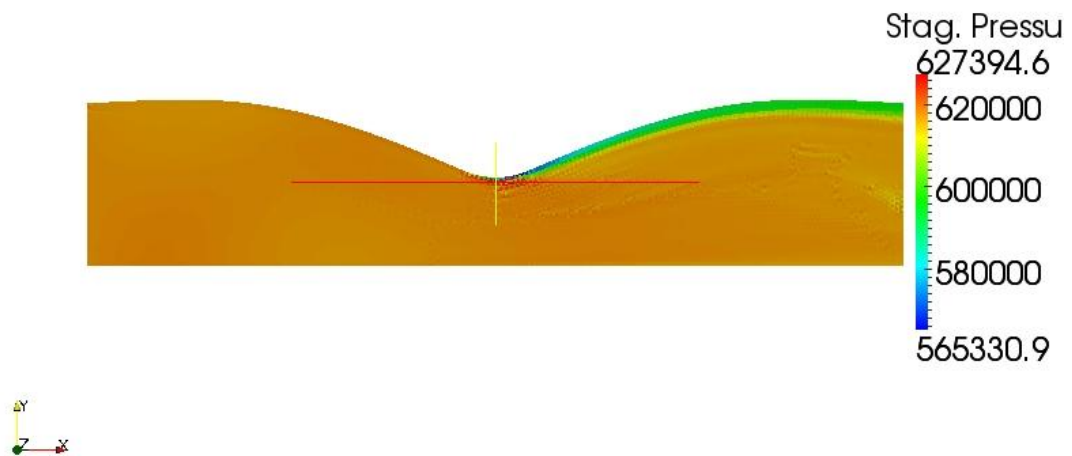


Figura 13: Pressão de estagnação calculada pelo Solver.

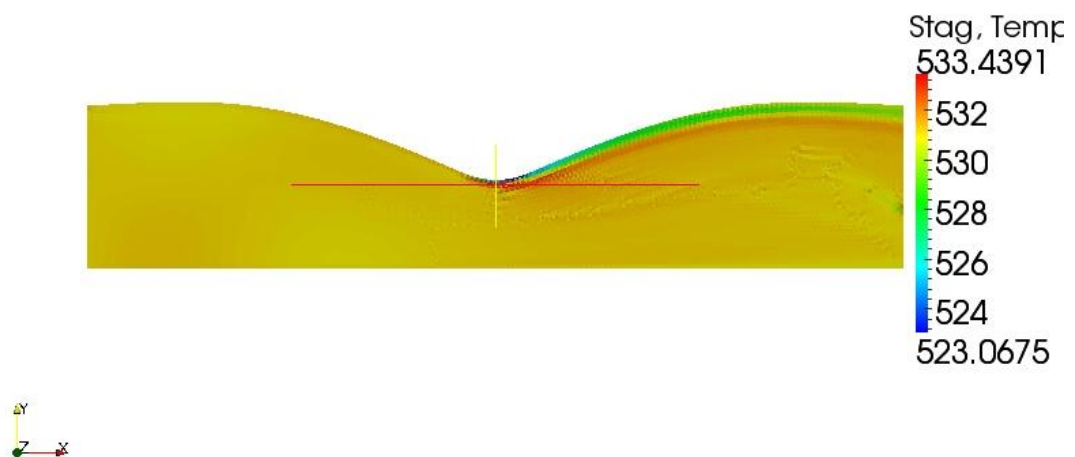


Figura 14: Temperatura de estagnação calculada pelo Solver.

Em ambos os casos, pode-se ver que os valores permanecem constantes por todo o escoamento, com exceção da parede da seção divergente do bocal. Isso é esperado, pois na região da parede é que os efeitos da aproximação por Euler são mais sentidos, pois nessa região a dissipação artificial é bem maior, o que provavelmente interfere na

precisão dos cálculos. Visto que no caso viscoso a velocidade nessa região seria nula e também haveria efeitos de viscosidade que afetariam o escoamento e suas propriedades no local. Por isso, essa diferença é aceitável como consequência da aproximação que é o uso das equações de Euler.

Apesar de em ambos os casos a pressão e temperatura de estagnações calculadas não serem próximas das calculas em 4.1, o fato de elas serem constantes pelo escoamento, salvo a exceção mencionada, demonstra que o cálculo usando as equações de Euler conseguiu reproduzir com boa precisão o escoamento.

Comparando com os valores de estagnação obtidos pelo Fluent, mostrados nas figuras 15 e 16, vemos que o Fluent calcula as pressões de estagnação mais próximas dos valores teóricos de 4.1, porém em alguns pontos o valor calculado é maior que o teórico. Vemos também a presença de diferenças maiores na região divergente da parede do bocal, o que , assim como com o Solver, é explicado pela adoção da hipótese de escoamento não-viscoso. Já no caso da temperatura, vemos que o Fluent calcula a temperatura de estagnação no valor de 4.1, com variações de menos de 1K. Esses resultados já eram esperados, pelo fato do Fluent ser um programa aperfeiçoado por várias versões.

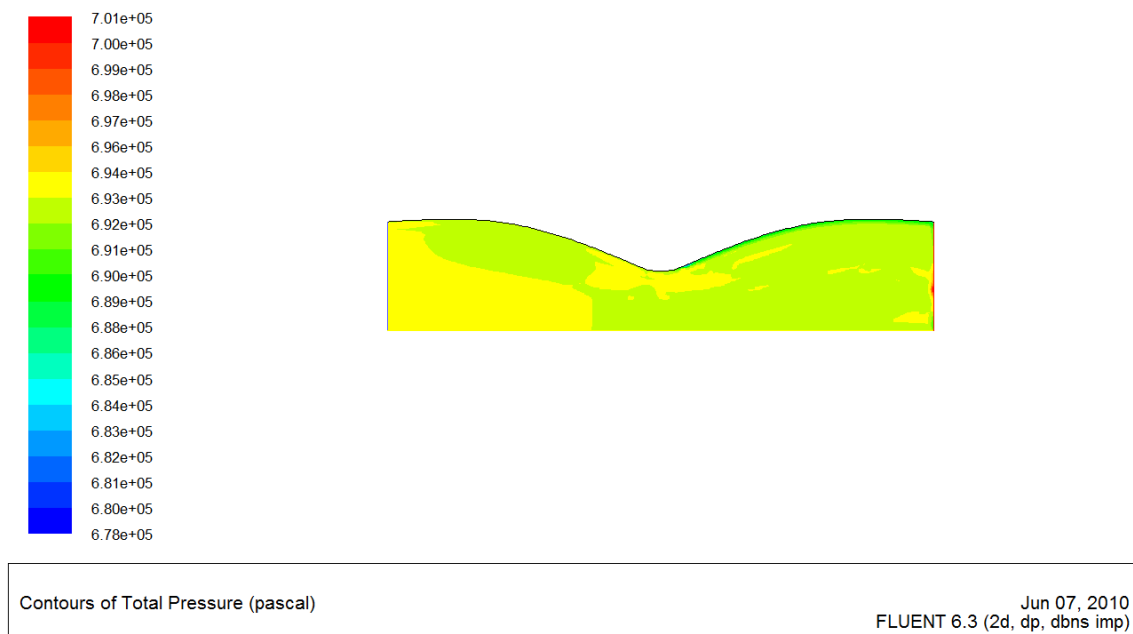
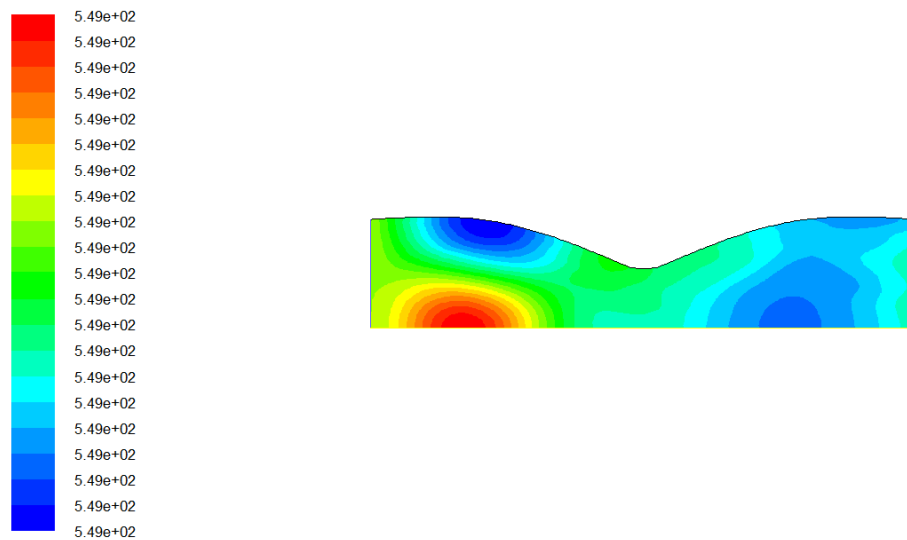


Figura 15: Pressão de estagnação calculada pelo Fluent.



Contours of Total Temperature (k)

Jun 07, 2010
FLUENT 6.3 (2d, dp, dbns imp)

Figura 16: Temperatura de estagnação calculada pelo Fluent.

4.2) Caso 2

No segundo caso, a pressão estática na entrada foi alterada para $p_1=1$ MPa e a temperatura estática foi de $T_1=500$ K. Na saída, a pressão estática foi mantida em $p_2=100$ kPa e a temperatura estática em $T_2=300$ K. O Mach inicial do escoamento foi de $M_{\text{inicial}}=0,7$

Novamente, com base no Mach inicial e na pressão e temperatura da entrada é possível calcular a pressão e temperatura de estagnação usando as equações 2.13 e 2.14. Com isso, temos que:

$$p_0 = 1.387 \text{ kPa} \text{ e } T_0 = 549 \text{ K} \quad (4.2)$$

Como no primeiro caso, começamos a comparação com a densidade, calculada pelo Solver na figura 17 e pelo Fluent na figura 18 (ambos em kg/m^3).

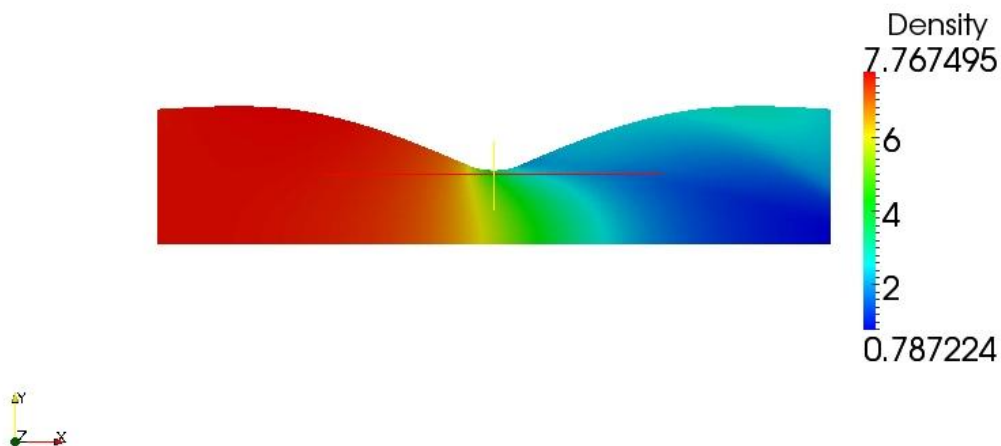


Figura 17: Cálculo de densidade pelo Solver (Caso 2).

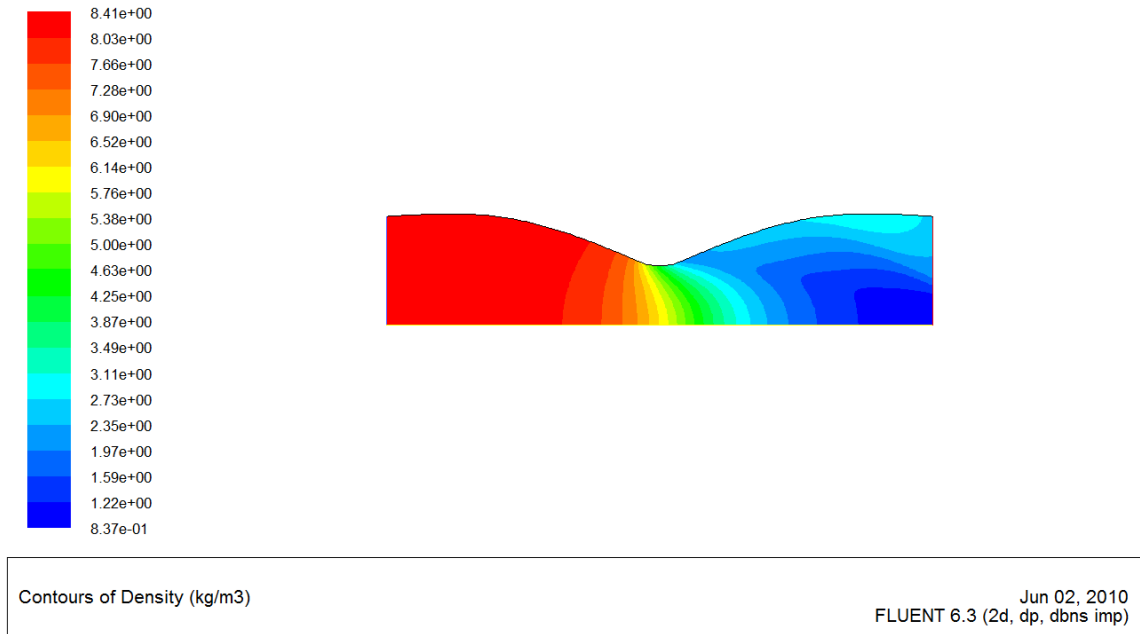


Figura 18: Calculo de densidade pelo Fluent (caso 2).

Como no caso anterior, apesar de haver uma diferença de cerca 7,5% entre os valores máximos de densidade, a sua distribuição é muito semelhante, o que valida os resultados obtidos.

Segue então a comparação entre os valores de pressão estática obtidas, pelo Solver (figura 19) e pelo Fluent (figura 20) (ambos em Pa).

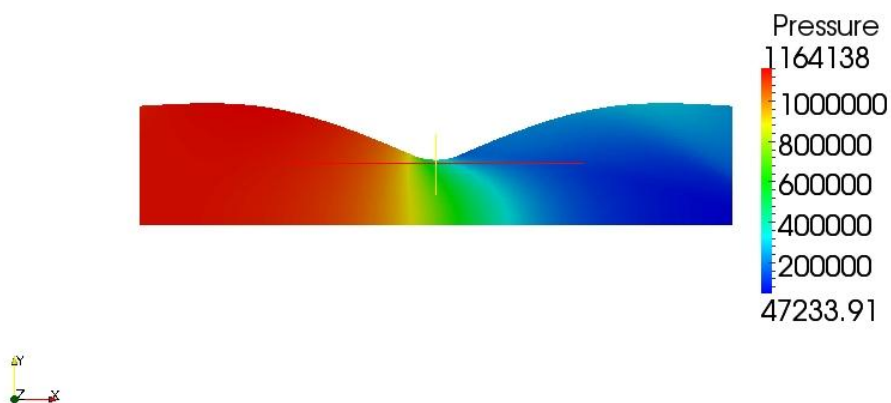


Figura 19: Pressão estática calculado pelo Solver (caso 2).

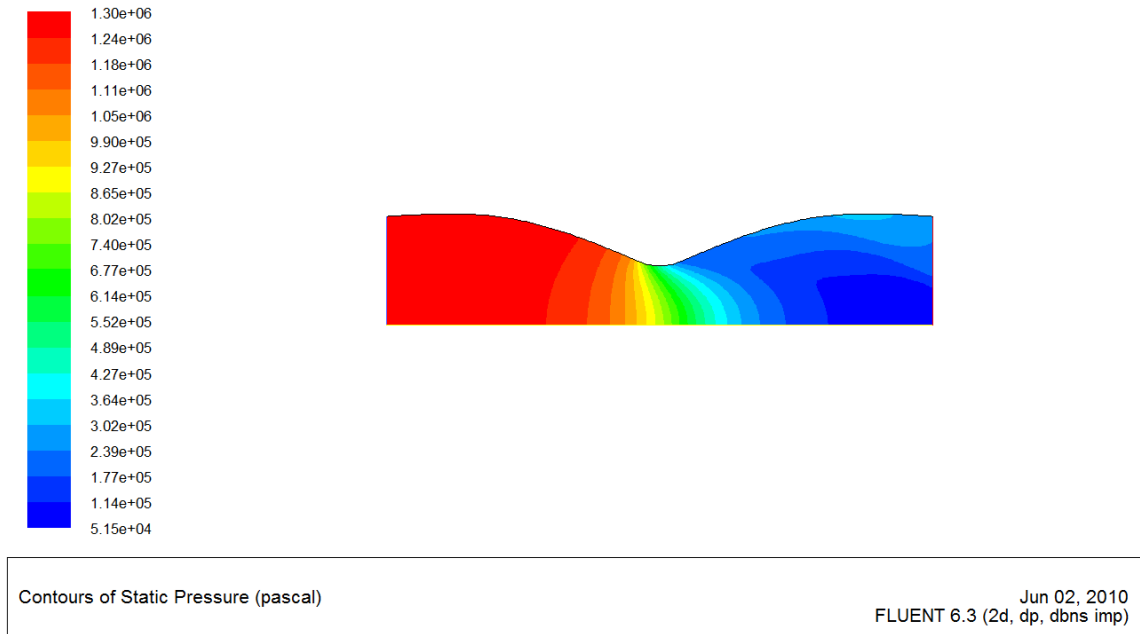


Figura 20: Pressão estática calculado pelo Fluent (caso 2).

Nesse caso, a diferença entre pressões máximas foi também da ordem de 10% e a sua distribuição é muito semelhante em ambos os casos. Além disso, em nenhum ponto a pressão estática ultrapassa a de estagnação, o que é de acordo com o esperado.

O próximo resultado a ser analisado é a temperatura estática, na figura 21 calculada pelo Solver e na figura 22 calculada pelo Fluent (ambas em K).

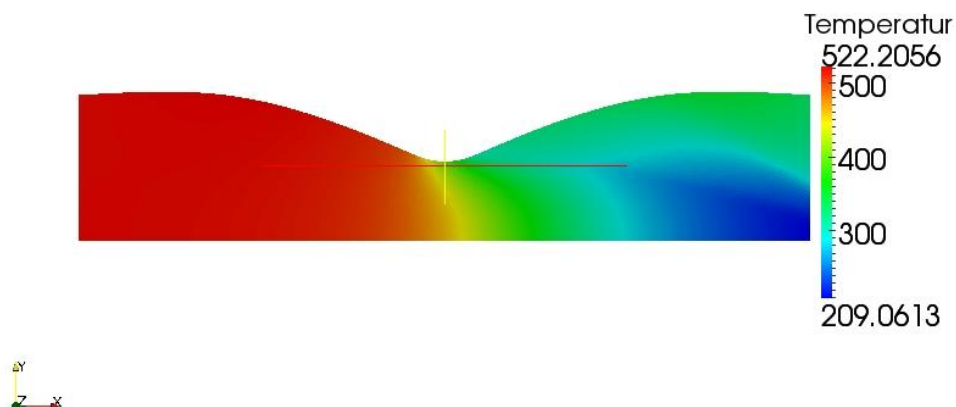


Figura 21: Temperatura estática calculada pelo Solver (caso 2).

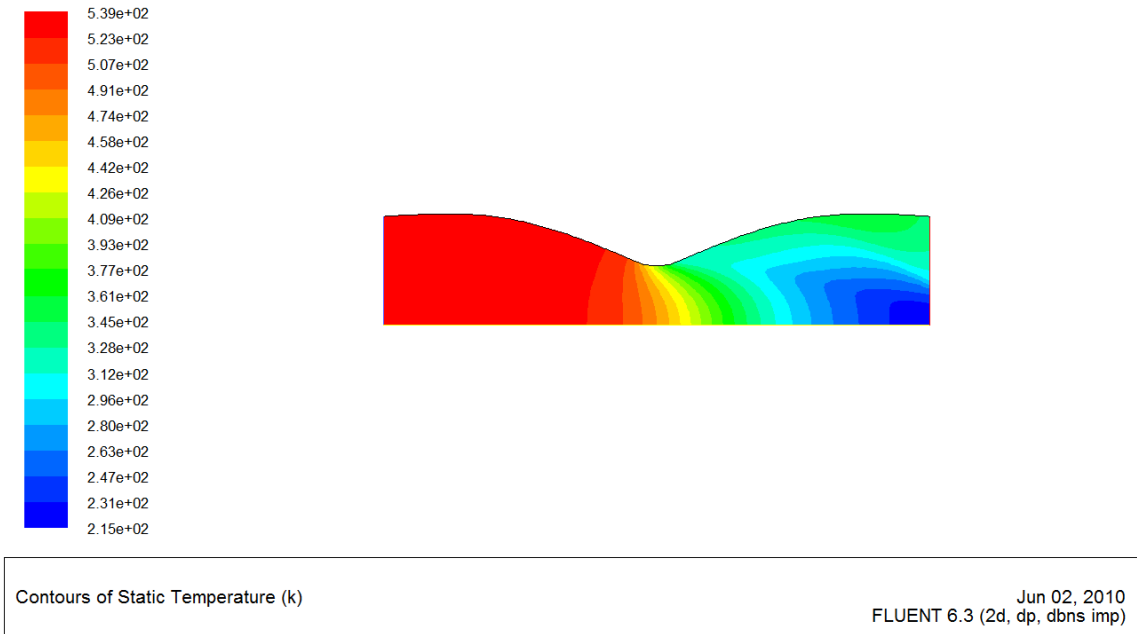


Figura 22: Temperatura estática calculada pelo Fluent (caso 2).

Aqui a diferença entre as temperaturas máximas se manteve em 3,5%, o que era esperado, pois as temperaturas na saída e na entrada não foram alteradas. Como no caso anterior, em nenhum ponto a temperatura estática é superior a de estagnação.

A última comparação é do número de Mach, calculado pelo Solver na figura 23 e pelo Fluent na figura 24.

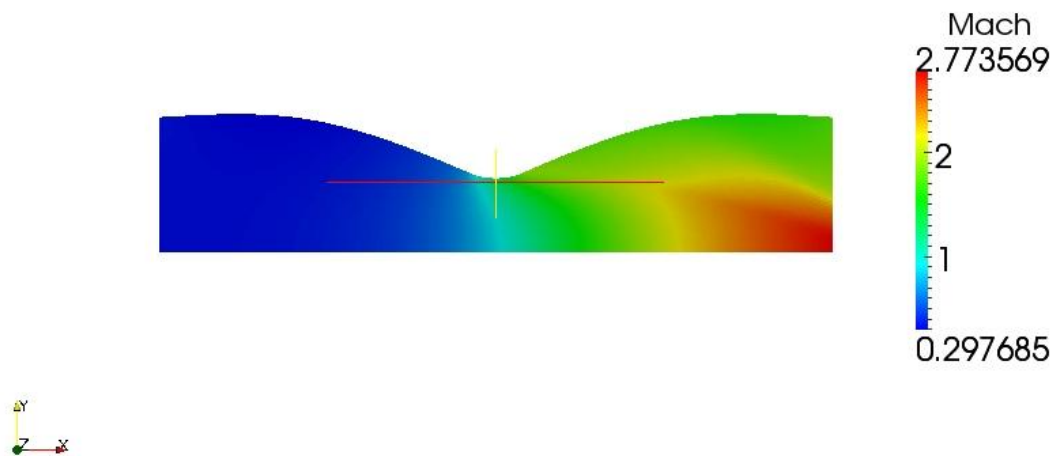


Figura 23: Número de Mach calculado pelo Solver (caso 2).

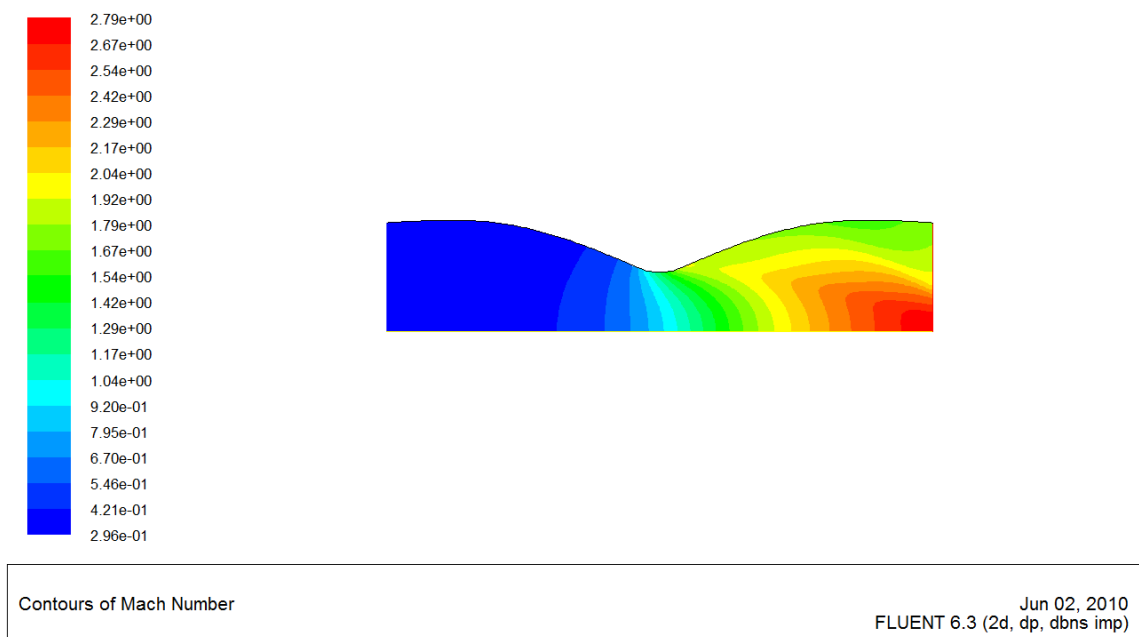


Figura 24: Número de Mach calculado pelo Fluent (caso 2).

Aqui os valores são idênticos ao primeiro caso, o que é esperado, visto que o bocal se encontrava bloqueado e, portanto, na sua vazão máxima. Além disso, como a equação 2.17 mostra, o número de Mach na saída é função da geometria do bocal e como esta não foi alterada, não se esperava uma mudança no número de Mach obtido.

Por último, os valores da pressão (figura 25) e temperatura (figura 26) de estagnação são calculados para checar se permanecem constantes pelo escoamento e não ultrapassam os valores máximos calculados em 4.2.

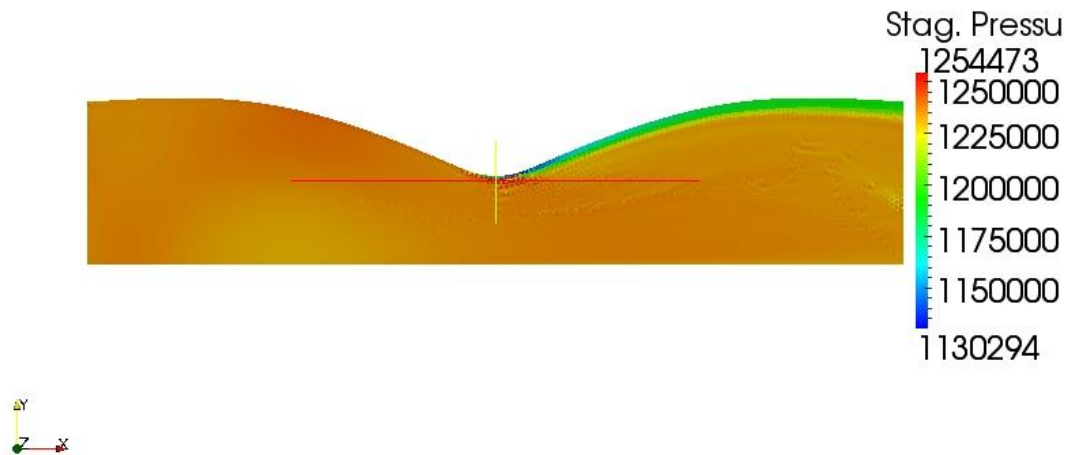


Figura 25: Pressão de estagnação calculada pelo Solver (caso 2).

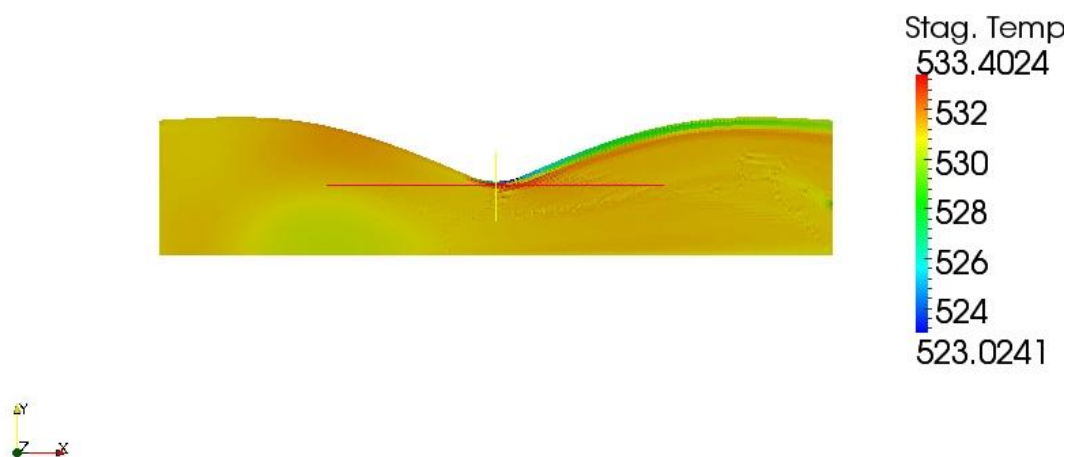


Figura 26: Temperatura de estagnação calculada pelo Solver (caso 2).

Assim como no caso 1, os valores de estagnação se mantiveram constantes, com exceção da parede da região divergente, o que era esperado conforme explicado no caso 1. Além disso, em nenhum ponto os valores foram maiores do que os calculados em 4.2, o que valida os resultados obtidos.

Comparando novamente com os valores de estagnação obtidos pelo Fluent, mostrados nas figuras 27 e 28, vemos que a situação é igual ao caso 1, com os cálculos do Fluent próximos dos valores teóricos,

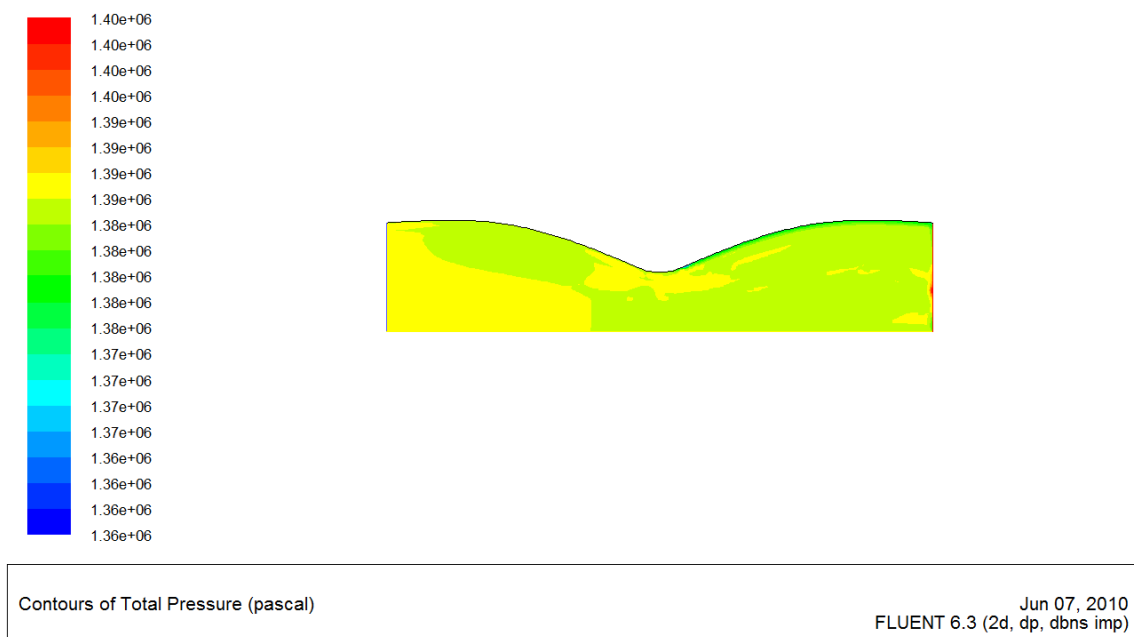


Figura 27: Pressão de estagnação calculada pelo Fluent (caso 2).

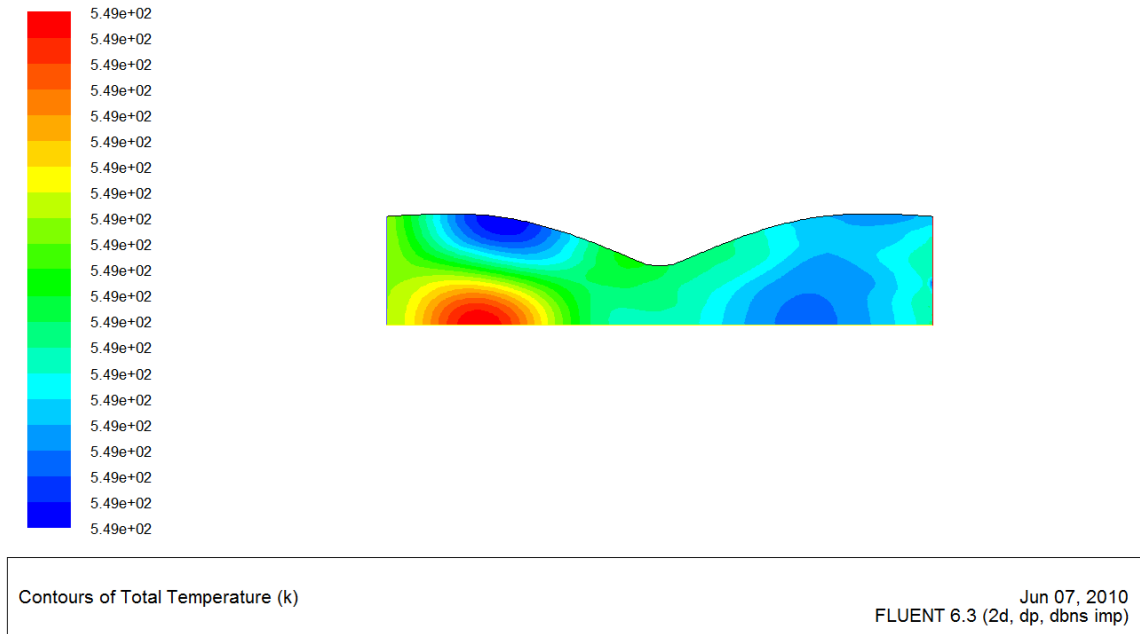


Figura 28: Temperatura de estagnação calculada pelo Fluent (caso 2).

4.3) Comparação com o caso Viscoso

Uma última comparação foi feita rodando o caso 2 no Fluent, mas dessa vez considerando o escoamento viscoso. Como se espera que as velocidades na parede sejam as mais afetadas pela mudança, é mostrado o resultado para o número de Mach na figura 29:

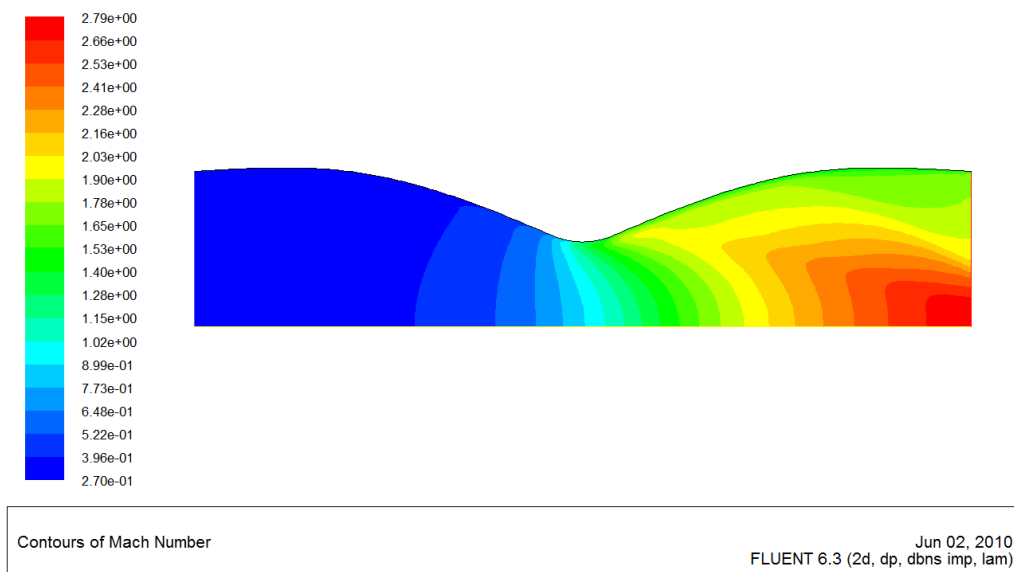


Figura 29: Número de Mach para o caso 2 viscoso.

Como se pode ver, comparado com as figuras 23 e 24 a principal diferença entre o caso viscoso versus o não-viscoso é a distribuição das velocidades na parede da região divergente do Bocal. Apesar disso, o valor máximo de Mach não se alterou, o que mostra que a aproximação de Euler pode fornecer bons resultados para o caso de escoamentos em bocais.

5)CONCLUSÃO

Como as simulações demonstraram, as equações de Euler são ótimas aproximações. Pois permitem a resolução de problemas complexos na área da Engenharia Aeronáutica, sem comprometer significativamente a precisão dos resultados obtidos na situação onde os efeitos de viscosidade e condutividade térmica podem ser desprezados. Por serem mais simples de serem implementadas numericamente que as equações completas de Navier-Stokes, elas permitem a solução numérica de problemas de aerodinâmica com códigos mais simples e com menor custo computacional. O fato de todas as simulações terem sido realizadas em um Notebook de uso pessoal, com um processado Core2 Duo da Intel, disponível comercialmente e a preços acessíveis demonstra isso.

Já os resultados obtidos pelo Solver demonstram que mesmo um programa criado originalmente para o calculo de escoamentos externos ao redor de aerofólios, quando devidamente adaptado, produz resultados satisfatórios. O fato de os resultados não serem mais próximos dos obtidos pelo Fluent é esperado, pois esse software já se encontra na sua 6ª edição e foi aperfeiçoado durante anos de uso por profissionais a ele dedicados e com o feedback recebido de milhares de clientes pelo mundo. Levando isso em consideração, pode-se dizer com segurança que o Solver criado por Marcelo T. Hayashi na Escola Politécnica é um excelente ponto de partida e, se devidamente aperfeiçoado e otimizado para fins específicos, como escoamentos externos ou internos, por exemplo, pode apresentar resultados ainda mais precisos.

Por último, como demonstrado pelo resultado da comparação da simulação viscosa versus não-viscosa, para casos de escoamentos de alta velocidade e sem troca de calor entre as superfícies e os gases, como no caso estudado, as equações de Euler produzem resultado extremamente satisfatórios, onde a diferença só é realmente sentida em regiões próximas de paredes ou outras superfícies. Isso faz com que as equações de Euler não sejam recomendadas para casos onde se deseja estudar a interação entre o fluido e uma superfície, como a fricção, por exemplo, mas se o usuário tiver em mente essas limitações poderá usar as equações de Euler para um grande números de casos na engenharia aeronáutica obtendo resultados satisfatórios.

6) BIBLIOGRAFIA

- [1] Anderson, J.D. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw Hill, 1995.
- [2] Anderson, J.D. *Modern Compressible Flow*. McGraw Hill, 2ª Edição, 1990.
- [3] Azevedo, J.L.F e Dourado, W.M.C. *Euler Solutions of Two Dimensional Flows Using Unstructured Meshes*, 3º COBEM, 1991.
- [4] Fabiani, L.F.v.R. *Simulação de Bocais em Escoamento Compressível*, Trabalho de formatura, EPUSP 2003.
- [5] Hayashi, M. T., *Estudo conceitual do problema adjunto baseado nas equações de Euler para aplicações de otimização aerodinâmica*, Tese de Mestrado, EPUSP, 2009.
- [6] Jameson, A. e Mavriplis, *Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh*, AIAA Journal 1986.
- [7] Ramalho, G.M. *Otimização de Foguetes de Combustível Sólido Utilizando-se Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD)*, Trabalho de formatura, EPUSP 2005.
- [8] Telles, B. *Simulação e Otimização do uso de Foguetes de Combustível Sólido*, Trabalho de formatura, EPUSP 2003.